

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства**Часть 1. ФИПИ****ПРИМЕРЫ**

Пример 1. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Пример 2. Найдите значение выражения при данном условии:

$$28a - 7b + 13, \text{ если } \frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6.$$

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = \frac{6}{1}$$

$$2a - 5b + 8 = 6(5a - 2b + 8)$$

$$2a - 5b + 8 = 30a - 12b + 48$$

$$2a - 5b + 8 - 30a + 12b - 48 = 0$$

$$-28a + 7b - 40 = 0$$

$$-28a + 7b = 40$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27$$

Ответ: -27

Пример 3. Решите уравнение: $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$.

$$x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) = 0$$

$$x^2(x + 5) - 16(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x + 5)(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad x - 4 = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x = -5 \quad x = 4 \quad x = -4$$

Ответ: $-5; -4; 4$

Пример 4. Решите уравнение: $x^3 + 8x^2 = x + 8$.

$$x^3 + 8x^2 = x + 8$$

$$x^2(x + 8) = (x + 8)$$

$$x^2(x + 8) - (x + 8) = 0$$

$$(x + 8)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 8)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \quad x - 1 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x = -8 \quad x = 1 \quad x = -1$$

Ответ: $-8; -1; 1$

Пример 5. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7 - x} = \sqrt{7 - x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7 - x} = \sqrt{7 - x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7 - x} - \sqrt{7 - x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$x = 8$ не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: -6

ОДЗ:

$$7 - x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

Пример 6. Решите уравнение: $x(x^2+10x+25)=14(x+5)$.

$$\begin{array}{lll}
 x(x^2+10x+25)=14(x+5) & x+5=0 & x^2+5x-14=0 \\
 x(x+5)^2=14(x+5) & x=-5 & D=b^2-4ac \\
 x(x+5)^2-14(x+5)=0 & & D=5^2-4\cdot 1\cdot(-14)=25+56=81 \\
 (x+5)(x(x+5)-14)=0 & & x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{81}}{2\cdot 1}=\frac{-5-9}{2}=\frac{-14}{2}=-7 \\
 (x+5)(x^2+5x-14)=0 & & x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{81}}{2\cdot 1}=\frac{-5+9}{2}=\frac{4}{2}=2
 \end{array}$$

Ответ: $-7; -5; 2$

Пример 7. Решите уравнение: $(x-3)(x^2+14x+49)=11(x+7)$.

$$\begin{array}{lll}
 (x-3)(x^2+14x+49)=11(x+7) & x+7=0 & x^2+4x-32=0 \\
 (x-3)(x+7)^2=11(x+7) & x=-7 & D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144 \\
 (x-3)(x+7)^2-11(x+7)=0 & & x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4-12}{2}=-8 \\
 (x+7)((x-3)(x+7)-11)=0 & & x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4+12}{2}=4 \\
 (x+7)(x^2+7x-3x-21-11)=0 & & \\
 (x+7)(x^2+4x-32)=0 & &
 \end{array}$$

Ответ: $-8; -7; 4$

Пример 8. Решите уравнение: $(x^2-16)^2+(x^2+3x-28)^2=0$.

$$\begin{array}{ll}
 (x^2-16)^2+(x^2+3x-28)^2=0 & \begin{cases} x^2-16=0 \\ -x^2-3x+28=0 \end{cases} \\
 (x^2-16)^2\geq 0 \quad (x^2+3x-28)^2\geq 0 & \hline
 \begin{cases} x^2-16=0 \\ x^2+3x-28=0 \quad | \cdot (-1) \end{cases} & x^2-16-x^2-3x+28=0 \\
 & -3x+12=0 \\
 & -3x=-12 \\
 \begin{cases} x^2-16=0 \\ -x^2-3x+28=0 \end{cases} & x=\frac{-12}{-3}=4
 \end{array}$$

Ответ: 4

Пример 9. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}-40=0$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{1) пусть } \frac{1}{x}=t, \text{ тогда уравнение} & t_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\cdot 1}=\frac{-6-14}{2}=-10 \\
 \text{принимает вид:} & t_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\cdot 1}=\frac{-6+14}{2}=4 \\
 t^2+6t-40=0 & \\
 D=b^2-4ac & \\
 D=6^2-4\cdot 1\cdot(-40)=36+160=196 & \text{2) таким образом, получаем 2 уравнения:} \\
 \frac{1}{x}=-10 & \frac{1}{x}=4 \\
 x=-\frac{1}{10} & x=\frac{1}{4}
 \end{array}$$

Ответ: $-\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{4}$

Пример 10. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

1) пусть $\frac{1}{x-3} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

2) решим 2 получившихся уравнения:

$$\frac{1}{x-3} = -2$$

$$x-3 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} + 3$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x-3} = 9$$

$$x-3 = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{9} + 3$$

$$x = 3\frac{1}{9}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{9}$

Пример 11. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$ ($t \geq 0^*$), тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

$t = -4$ — не удовлетворяет условию *

2) т.к. $t = 3$, то

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5 - \sqrt{3})(x+5 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x+5 - \sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3}$$

$$x+5 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}$ и $-5 + \sqrt{3}$

Пример 12. Решите уравнение: $x^4 = (x-42)^2$.

$$x^4 = (x-42)^2$$

$$x^4 - (x-42)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-42))(x^2 + (x-42)) = 0$$

$$(x^2 - x + 42)(x^2 + x - 42) = 0$$

$$x^2 - x + 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42 = -167 < 0$$

действительных корней нет

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 13}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 13}{2} = 6$$

Ответ: -7 и 6

Пример 13. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$3x^2 - 8x = 9x - 24$$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$3x^2 - 17x + 24 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 289 - 288 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{17 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{17 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

1) если $x = 2\frac{2}{3}$, то

$$y = 9x - 24 = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 = 24 - 24 = 0$$

2) если $x = 3$, то

$$y = 9x - 24 = 9 \cdot 3 - 24 = 27 - 24 = 3$$

Ответ: $\left(2\frac{2}{3}; 0\right)$ и $(3; 3)$

Пример 14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22. \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22; \end{cases}$$

$$9x^2 + 0 = 36 \quad |:9$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x-2=0 \quad x+2=0$$

$$x=2 \quad x=-2$$

1) если $x = 2$, то

$$7 \cdot 2^2 + y = 14$$

$$y = 14 - 28$$

$$y = -14$$

2) если $x = -2$, то

$$7 \cdot (-2)^2 + y = 14$$

$$y = 14 - 28$$

$$y = -14$$

Ответ: $(-2; -14)$ и $(2; -14)$

Пример 15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases} \quad |:5$$

$$10x^2 + 5y^2 = 295,$$

$$10x^2 + 5y^2 = 59x$$

$$59x = 295$$

$$x = 5$$

при $x = 5$:

$$2x^2 + y^2 = 59$$

$$2 \cdot 5^2 + y^2 = 59$$

$$y^2 = 59 - 50$$

$$y^2 = 9$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$(y-3)(y+3) = 0$$

$$y-3=0 \quad y+3=0$$

$$y=3 \quad y=-3$$

Ответ: $(5; -3)$ и $(5; 3)$

Пример 16. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$.

$$\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0, \text{ т.к. } -21 < 0, \text{ то}$$

$$(x+6)^2-10 < 0$$

$$(x+6)^2 - (\sqrt{10})^2 < 0$$

$$(x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) < 0$$

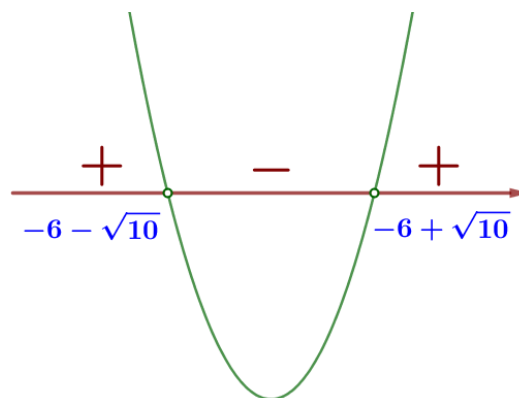
$$f(x) = (x+6)^2 - 10$$

$$(x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) = 0$$

$$x+6-\sqrt{10} = 0 \quad x+6+\sqrt{10} = 0$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{10} \quad x_2 = -6 - \sqrt{10}$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = (x+6)^2 - 10$ ($a > 0$):



Ответ: $x \in (-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$

Пример 17. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

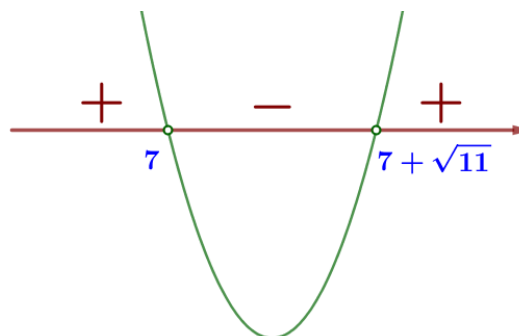
$$f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) = 0$$

$$x-7 = 0 \quad x-7-\sqrt{11} = 0$$

$$x = 7 \quad x = 7 + \sqrt{11}$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$ ($a > 0$):



Ответ: $x \in (7; 7 + \sqrt{11})$

Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

ПРИМЕРЫ

Пример 18. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(x) = \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(6x + \frac{1}{x}\right)$.

$$\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{6}{\frac{1}{a}}\right)\left(6\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 6a\right)\left(\frac{6}{a} + a\right)} = 1$$

Пример 19. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p(18-a)}$, если $p(x) = \frac{x(18-x)}{x-9}$.

$$\frac{p(a)}{p(18-a)} = p(a) : p(18-a) = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)(18-(18-a))}{(18-a)-9} = \frac{a(18-a)}{a-9} \cdot \frac{9-a}{(18-a)a} = -1$$

Пример 20. Решите уравнение: $(4x-9)^2(x-3) = (4x-9)(x-3)^2$.

$$\begin{aligned} (4x-9)^2(x-3) &= (4x-9)(x-3)^2 \\ (4x-9)^2(x-3) - (4x-9)(x-3)^2 &= 0 & 4x-9=0 & \quad x-3=0 & \quad 3x-6=0 \\ (4x-9)(x-3)(4x-9-(x-3)) &= 0 & 4x=9 & \quad x=3 & \quad 3x=6 \\ (4x-9)(x-3)(3x-6) &= 0 & x=2,25 & \quad x=3 & \quad x=2 \end{aligned}$$

Ответ: 2; 2,25; 3

Пример 21. Решите уравнение: $(x-1)(x+7)(x-8) = (x-1)(x-8)(x+11)$.

$$\begin{aligned} (x-1)(x+7)(x-8) &= (x-1)(x-8)(x+11) & (x-1)(x-8)(-4) &= 0 \\ (x-1)(x+7)(x-8) - (x-1)(x-8)(x+11) &= 0 & x-1=0 & \quad x-8=0 \\ (x-1)(x-8)(x+7-(x+11)) &= 0 & x=1 & \quad x=8 \\ (x-1)(x-8)(x+7-x-11) &= 0 \end{aligned}$$

Ответ: 1 и 8

Пример 22. Решите уравнение: $(x+3)^3 = 9(x+3)$.

$$\begin{aligned} (x+3)^3 &= 9(x+3) & (x+3)(x^2+6x) &= 0 \\ (x+3)^3 - 9(x+3) &= 0 & (x+3)x(x+6) &= 0 \\ (x+3)((x+3)^2 - 9) &= 0 & x+3=0 & \quad x=0 & \quad x+6=0 \\ (x+3)(x^2+6x+9-9) &= 0 & x=-3 & & \quad x=-6 \end{aligned}$$

Ответ: -6; -3; 0

Пример 23. Решите уравнение: $4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x + 13 &= (x+3)^2 \\ 4x^2 - 7x + 13 &= x^2 + 6x + 9 \\ 4x^2 - 7x + 13 - x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ 3x^2 - 13x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 - 11}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 + 11}{6} = \frac{24}{6} = 4 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169 - 48 = 121$$

Ответ: $\frac{1}{3}$ и 4

Пример 24. Решите уравнение: $x^6 = (11x - 18)^3$.

$$x^6 = (11x - 18)^3$$

$$(x^2)^3 = (11x - 18)^3$$

$$x^2 = 11x - 18$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 121 - 72 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

Ответ: 2 и 9

Пример 25. Решите уравнение: $x^3 = 4x^2 + 21x$.

$$x^3 = 4x^2 + 21x$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 10}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

Ответ: -3; 0; 7

Пример 26. Решите уравнение: $(x - 5)^2(x - 2) = 4(x - 5)$.

$$(x - 5)^2(x - 2) = 4(x - 5)$$

$$(x - 5)^2(x - 2) - 4(x - 5) = 0$$

$$(x - 5)^2(x - 2) - 4(x - 5) = 0$$

$$(x - 5)((x - 5)(x - 2) - 4) = 0$$

$$(x - 5)(x^2 - 5x - 2x + 10 - 4) = 0$$

$$(x - 5)(x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 5 \quad D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 5}{2} = 6$$

Ответ: 1; 5; 6

Пример 27. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (3x + 7y)^2 = 10y, \\ (3x + 7y)^2 = 10x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x + 7y)^2 = 10y, \\ (3x + 7y)^2 = 10x \end{cases}$$

$$10x = 10y \quad |:10$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$(3y + 7y)^2 = 10y$$

$$100y^2 - 10y = 0$$

$$10y(y - 1) = 0$$

$$y = 0 \quad y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$1) \text{ если } y = 0, \text{ то } x = 0$$

$$2) \text{ если } y = 1, \text{ то } x = 1$$

Ответ: (0; 0) и (1; 1)

Пример 28. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y-2x=2, \\ x^2+2xy-y^2=8. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y-2x=2, \\ x^2+2xy-y^2=8 \end{cases} & \quad x^2-4x-12=0 & \quad 1) \text{ если } x=-2, \text{ то} \\ \begin{cases} y=2+2x, \\ x^2+2x(2+2x)-(2+2x)^2=8 \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_1 \cdot x_2=-12 \end{cases} & \quad y=2+2x=2+2 \cdot (-2)=-2 \\ x^2+4x+4x^2-(4+8x+4x^2)=8 & & \quad 2) \text{ если } x=6, \text{ то} \\ x^2+4x+4x^2-4-8x-4x^2-8=0 & \quad \begin{cases} x_1=-2, \\ x_2=6 \end{cases} & \quad y=2+2x=2+2 \cdot 6=14 \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -2)$ и $(6; 14)$

Пример 29. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y=7, \\ 2x^2-y=20. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2+y=7, \\ 2x^2-y=20 \end{cases} & \quad x^2=9 & \quad 1) \text{ если } x=3, \text{ то} \\ \begin{cases} y=7-x^2, \\ 2x^2-(7-x^2)=20 \end{cases} & \quad \begin{cases} x^2-9=0 \\ (x-3)(x+3)=0 \end{cases} & \quad y=7-x^2=7-3^2=7-9=-2 \\ 2x^2-7+x^2=20 & \quad x-3=0 \quad x+3=0 & \quad 2) \text{ если } x=-3, \text{ то} \\ 2x^2+x^2=20+7 & \quad x=3 \quad x=-3 & \quad y=7-x^2=7-(-3)^2=7-9=-2 \\ 3x^2=27 \quad |:3 & & \end{aligned}$$

Ответ: $(-3; -2)$ и $(3; -2)$

Пример 30. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-3y=7, \\ \frac{x}{5}+\frac{y+4}{4}=-1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-3y=7, \\ \frac{x}{5}+\frac{y+4}{4}=-1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x=7+3y, \\ 4x+5y+20=-20 \end{cases} & \quad \begin{cases} x=7+3y, \\ 4(7+3y)+5y+20=-20 \end{cases} \\ \begin{cases} x=7+3y, \\ \frac{x}{5}+\frac{y+4}{4}=-1 \end{cases} & \quad \begin{cases} 28+12y+5y+20=-20 \\ 17y=-20-20-28 \end{cases} & \quad \begin{cases} 28+12y+5y+20=-20 \\ 17y=-68 \end{cases} \\ \begin{cases} x=7+3y, \\ \frac{4x}{20}+\frac{5y+20}{20}=\frac{-20}{20} \end{cases} & \quad \begin{cases} y=-68:17=-4 \\ \text{при } y=-4: \\ x=7+3 \cdot (-4)=7-12=-5 \end{cases} & \quad \begin{cases} y=-68:17=-4 \\ \text{при } y=-4: \\ x=7+3 \cdot (-4)=7-12=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-5; -4)$

Пример 31. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x-5)(y-8)=0, \\ \frac{y-6}{x+y-11}=4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(y-8)=0, \\ \frac{y-6}{x+y-11}=4 \end{cases}$$

1) если $x=5$, то

$$\frac{y-6}{5+y-11}=4$$

$$\frac{y-6}{y-6}=4$$

корней нет

2) если $y=8$, то

$$\frac{8-6}{x+8-11}=4$$

$$\frac{2}{x-3}=4$$

$$x-3=\frac{2}{4}$$

$$x=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$$

Ответ: $\left(3\frac{1}{2}; 8\right)$

Пример 32. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2=7y-3, \\ x^2+19=7y+y^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=7y-3, \\ x^2+19=7y+y^2 \end{cases}$$

$$7y-3+19=7y+y^2$$

$$7y-3+19-7y-y^2=0$$

$$16-y^2=0$$

$$(4-y)(4+y)=0$$

$$4-y=0 \quad 4+y=0$$

$$y=4 \quad y=-4$$

1) если $y=4$, то

$$x^2=7 \cdot 4 - 3$$

$$x^2=25$$

$$x^2-25=0$$

$$(x-5)(x+5)=0$$

$$x-5=0 \quad x+5=0$$

$$x=5 \quad x=-5$$

2) если $y=-4$, то

$$x^2=7 \cdot (-4) - 3$$

$$x^2=-31$$

корней нет

Ответ: $(-5; 4)$ и $(5; 4)$

Пример 33. Решите неравенство: $(4x+1)(x-2) > -5$.

$$(4x+1)(x-2) > -5$$

$$4x^2-8x+x-2+5 > 0$$

$$4x^2-7x+3 > 0$$

$$f(x)=4x^2-7x+3$$

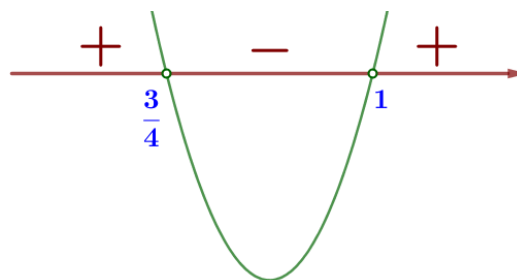
$$4x^2-7x+3=0$$

$$D=b^2-4ac=(-7)^2-4 \cdot 4 \cdot 3=49-48=1$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{7-\sqrt{1}}{2 \cdot 4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{7+\sqrt{1}}{2 \cdot 4}=\frac{8}{8}=1$$

Изобразим схематически график функции $f(x)=4x^2-7x+3$ ($a>0$):



Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$

Пример 34. Решите неравенство: $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$.

$$(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$$

$$(x-6)^2 - (6x-1)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 12x + 36) - (36x^2 - 12x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$$

$$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-35)$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

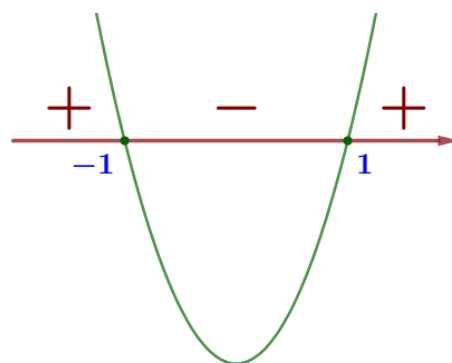
$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x-1=0 \quad x+1=0$$

$$x=1 \quad x=-1$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = x^2 - 1$ ($a > 0$):



Ответ: $x \in [-1; 1]$

Пример 35. Решите неравенство: $x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$.

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16) \quad | :(-x^2-16) < 0$$

$$x^2 \geq 100$$

$$x^2 - 100 \geq 0$$

$$f(x) = x^2 - 100$$

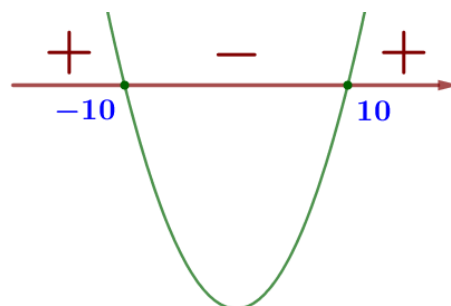
$$x^2 - 100 = 0$$

$$(x-10)(x+10) = 0$$

$$x-10=0 \quad x+10=0$$

$$x=10 \quad x=-10$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = x^2 - 100$ ($a > 0$):



Ответ: $x \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$

Пример 36. Решите неравенство: $\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0$.

$$\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0, \text{ т.к. } -17 < 0, \text{ то}$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

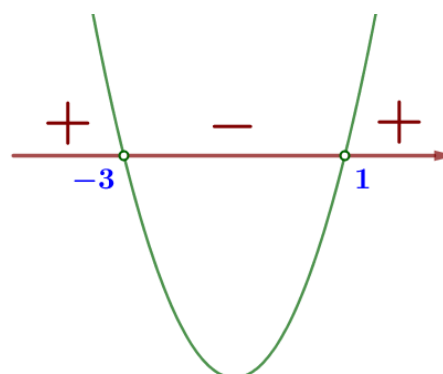
$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ($a > 0$):



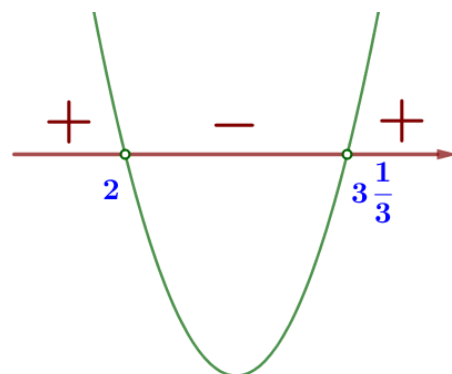
Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Пример 37. Решите неравенство: $\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4} &< \frac{4x-5}{3} \\ \frac{3x^2}{12} &< \frac{16x-20}{12} \quad | \cdot 12 \\ 3x^2 &< 16x-20 \\ 3x^2 - 16x + 20 &< 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 - 16x + 20 \\ 3x^2 - 16x + 20 &= 0 \\ D &= b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 256 - 240 = 16 \\ x_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 - 4}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 + 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = 3x^2 - 16x + 20$ ($a > 0$):

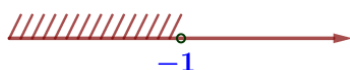


Ответ: $x \in \left(2; 3\frac{1}{3}\right)$

Пример 38. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, * \\ (x-4)(x+7) < 0 ** \end{cases}$$

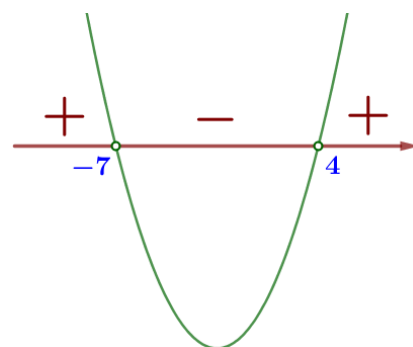
$$\begin{aligned}*2(3x+5) - 7(2x+3) &> 3x \\ 6x+10-14x-21-3x &> 0 \\ -11x-11 &> 0 \\ -11x &> 11 \quad | :(-11) \\ x &< -1\end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -1)$$

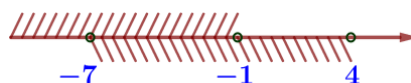
$$\begin{aligned}f(x) &= (x-4)(x+7) \\ (x-4)(x+7) &= 0 \\ x-4 &= 0 \quad x+7 = 0 \\ x &= 4 \quad x = -7\end{aligned}$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = (x-4)(x+7)$ ($a > 0$):



$$x \in (-7; 4)$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ x \in (-7; 4) \end{cases}$$



$$x \in (-7; -1)$$

Пример 39. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x \end{cases}$$

т.к. $4+(1-5x)^2 > 0$, то

$$\begin{cases} 8-x \geq 0, \\ -7x+2x \leq 23-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \geq -8, & | :(-1) \\ -5x \leq 20 & | :(-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -4 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-4; 8]$

Часть 3. ФИПИ. Типовые экзаменационные варианты*

ПРИМЕРЫ

Пример 40. Решите уравнение $x^6 = -(3-4x)^3$.

$$x^6 = -(3-4x)^3$$

$$(x^2)^3 = (-(3-4x))^3$$

$$x^2 = -(3-4x)$$

$$x^2 = -3+4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Ответ: 1 и 3

Пример 41. Решите неравенство $-\frac{31}{x^2-3x-10} \geq 0$.

$$-\frac{31}{x^2-3x-10} \geq 0$$

$$\frac{31}{x^2-3x-10} \geq 0, \text{ т.к. } 31 > 0, \text{ то}$$

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

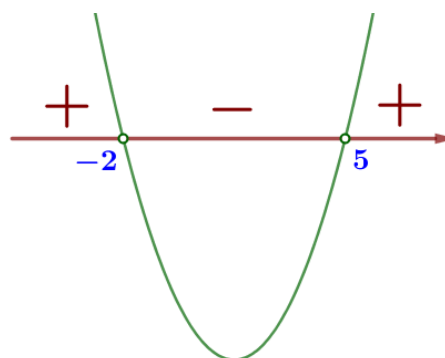
$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = x^2 - 3x - 10$ ($a > 0$):



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$

Пример 42. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x+y)^2 = 82 + 2 \cdot 9$$

$$(x+y)^2 = 100$$

$$x+y=10 \quad x+y=-10$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-10 \\ xy=9 \end{cases}$$

Составим и решим две системы:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x+y=10 \\ xy=9 \end{cases} \\ & y=10-x \\ & x(10-x)=9 \\ & 10x-x^2=9 \\ & x^2-10x+9=0 \end{aligned}$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=(-10)^2-4 \cdot 1 \cdot 9=100-36=64$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{10-\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10-8}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{10+\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10+8}{2} = 9$$

$$\text{а) при } x=1 \quad y=10-x=10-1=9$$

$$\text{б) при } x=9 \quad y=10-x=10-9=1$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \begin{cases} x+y=-10 \\ xy=9 \end{cases} \\ & y=-10-x \\ & x(-10-x)=9 \\ & -10x-x^2=9 \\ & x^2+10x+9=0 \end{aligned}$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=10^2-4 \cdot 1 \cdot 9=100-36=64$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-10-\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10-8}{2} = -9$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10+8}{2} = -1$$

$$\text{в) при } x=-9 \quad y=-10-x=-10+9=-1$$

$$\text{г) при } x=-1 \quad y=-10-x=-10+1=-9$$

Ответ: (1; 9); (9; 1); (-9; -1); (-1; -9)